Aula 14

Equações Diferenciais Ordinárias Escalares de 1ª Ordem **Separáveis**

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{f(y)} \qquad \Leftrightarrow \qquad f(y)\frac{dy}{dt} = g(t),$$

com g, f funções reais contínuas.

Objetivo: Escrever o lado esquerdo da equação como a derivada da função composta

$$f(y(t))\frac{dy}{dt} = \frac{dF}{dy}(y(t))\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left[F(y(t))\right],$$

com

$$F(y) = \int f(y)dy.$$

tal que a equação se escreve como

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left[F(y(t))\right] = g(t) \Leftrightarrow F(y(t)) = \int g(t)dt + C, \quad C \in \mathbb{R}.}$$

Exemplo:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2t}{3y^2 + e^y}, \qquad y(0) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$y^3 + e^y = t^2 + 1$$

Teorema (Função Implícita): Seja $\Phi(t, y)$ uma função de classe C^1 e $\Phi(t_0, y_0) = 0$. Então, se

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(t_0, y_0) \neq 0,$$

existe uma vizinhança U de (t_0, y_0) e uma função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, com $t_0 \in I$, $f(t_0) = y_0$ tal que

$$(t, y) \in U, \quad \Phi(t, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(t).$$

Teorema: Considere-se o problema de Cauchy para a EDO separável

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{f(y)}, \qquad y(t_0) = y_0,$$

com g, f funções reais contínuas em vizinhanças, respetivamente, de t_0 e y_0, com $f(y_0) \neq 0$.
Então existe solução única $y :]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\to \mathbb{R}$, para algum $\varepsilon > 0$, a qual é dada implicitamente por

$$F(y) = F(y_0) + \int_{t_0}^{t} g(s)ds, \qquad \text{com } F(y) = \int f(y)dy.$$

Exemplo Particular de Equações Separáveis

EDOs **Autónomas**

$$\frac{dy}{dt} = f(y)$$

Definição: Chamam-se **pontos de equilíbrio** de uma EDO autónoma às soluções constantes $y(t) = c$.

Proposição: A função constante $y(t) = c$ é solução de $\frac{dy}{dt} = f(y)$ se e só se $f(c) = 0$, i.e. os pontos de equilíbrio de uma EDO autónoma são precisamente os zeros de $f(y)$.

Definição: Os pontos de equilíbrio de EDOs autónomas classificam-se como **estáveis** ou **instáveis**. Diz-se que uma solução $y(t) = c$ é **estável** se, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que soluções com condições iniciais a distância inferior a δ de c se mantêm para tempos futuros, na vizinhança ε de $y(t) = c$. É **instável** em caso contrário.

Equações Diferenciais Ordinárias Escalares de 1ª Ordem **Exatas**

Definição: Diz-se que uma equação diferencial ordinária escalar, de primeira ordem

$$M(t,y) + N(t,y)\frac{dy}{dt} = 0,$$

é **exata** se existe $\phi : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$M(t,y) = \frac{\partial \phi}{\partial t}, \qquad N(t,y) = \frac{\partial \phi}{\partial y},$$

ou seja, se e só se o campo $(M(t,y), N(t,y))$ é um campo gradiente (ou conservativo). Nesse caso, a solução geral é dada implicitamente por

$$\phi(t,y) = c, \qquad c \in \mathbb{R},$$

garantindo existência e unicidade local, na vizinhança duma condição inicial $y(t_0) = y_0$, pelo teorema da função implícita, se $\frac{\partial \phi}{\partial y}(t_0, y_0) = N(t_0, y_0) \neq 0$.

Proposição: Considere-se uma equação diferencial ordinária escalar, de primeira ordem

$$M(t,y) + N(t,y)\frac{dy}{dt} = 0,$$

com $M, N : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $C^1(\Omega)$. Então:

- é condição necessária para ser exata que o campo $(M(t,y), N(t,y))$ seja fechado em Ω, ou seja, que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

- é condição suficiente para ser exata que o domínio Ω seja simplesmente conexo e o campo $(M(t,y), N(t,y))$ seja fechado em Ω.

Equações Diferenciais Ordinárias Escalares de 1ª Ordem **Redutíveis a Exatas**

Definição: Diz-se que uma equação diferencial ordinária escalar, de primeira ordem

$$M(t,y) + N(t,y)\frac{dy}{dt} = 0,$$

com $M, N : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $C^1(\Omega)$ num conjunto simplesmente conexo Ω é **redutível a exata** se existe $\mu : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial \mu}{\partial y}M + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial t}N + \mu\frac{\partial N}{\partial t},$$

ou seja, se e só se o campo $(\mu(t,y)M(t,y), \mu(t,y)N(t,y))$ é um campo gradiente (ou conservativo).
Quando tal função μ existe, denomina-se **fator integrante**.

Proposição: Dada uma equação diferencial ordinária escalar, de primeira ordem

$$M(t,y) + N(t,y)\frac{dy}{dt} = 0,$$

com $M, N : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $C^1(\Omega)$ num conjunto simplesmente conexo Ω é **redutível a exata** com

- Fator integrante $\mu = \mu(y)$ se $(\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y})/M$ é apenas função de y. Nesse caso, obtém-se o fator integrante pela solução da EDO (em y)

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{\frac{\partial N}{\partial t} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}\mu.$$

- Fator integrante $\mu = \mu(t)$ se $(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t})/N$ é apenas função de t. Nesse caso, obtém-se o fator integrante pela solução da EDO (em t)

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N}\mu.$$